

СЕЋАЊА НА ЧАСЛАВА СТАНОЈЕВИЋА И ЊЕГОВ НАУЧНИ ДОПРИНОС
Градимиr В. Миловановић, дописни члан САНУ

MEMORIES OF CASLAV STANOJEVIĆ AND HIS SCIENTIFIC
CONTRIBUTION

Gradimir V. Milovanović, Corresponding Member of SASA

Проф. Петроније Тони Милојевић (New Jersey Institute of Technology, Newark), чији је Часлав венчани кум (крстио му је децу Стефана и Александра), написао је један осврт под називом: **Часлав В. Станојевић – ренесансни човек**. Овај осврт писан је од срца и мени је знатно олакшао посао јер је прецизно са доста детаља описао Часлава као изванредног математичара и сјајног професора, врло образованог и великог познаваоца историје, религије, литературе и филозофије. Часлав је био високи интелектуалац (поред српског и енглеског, говорио је руски и француски), строг и праведан и изнад свега је волео живот и људе.

О његовом математичком опусу тешко је говорити у кратком времену, а ја ћу овом приликом покушати да дам један краћи приказ његових резултата, не упуштајући се у детаљну анализу. Часлав је написао око 50 научних радова (објављених у најбољим часописима) и има преко 100 цитата. Био је едитор 4 зборника радова и ментор за осам кандидата код израде докторских дисертација на **Missouri University of Science and Technology** у периоду 1976 – 2002 (John Garrett, Salvadore Guccione, Jr., William Bray, Dimitrios Natsis, Everett McCoy, Ibrahim Canak, Mehmet Dik, Filiz Dik).

На самом почетку његове блиставе научне каријере, Часлав Станојевић, као веома талентован и широко образовани млади математичар, ради у више научних области. Његови први радови се односе на решавање симултаних Булових једначина [On a system of the set equations, *Bull. Soc. Math. Phys. Serbie* **4** (1952). no. 3-4, 39–41], решавање неких проблема у теорији вероватноће, проблема у Банаховим алгебрама, али почиње и са проблемима интеграбилности тригонометријских редова, што ће бити главно поље његовог научног рада у каснијем периоду. У том почетном периоду, Часлав је објавио и један рад на француском језику у познатом часопису Француске академије наука [Sur une généralisation d'une inégalité de M. Kolmogoroff, *C. R. Acad. Sci. Paris* **239**, (1954). 854–856], у коме је генералисао важну неједнакост једног од најпознатих математичара двадесетог века Андрeј Николаевич Колмогорова (1903–1987). У раду [Mielnik's probability manifolds and inner product spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* **18** (1970), 531–532], Станојевић разматра потребне и довољне услове да један нормирани линеарни простор X буде простор са унутрашњим производом, показујући притом еквиваленцију резултата које је добио М.М. Day [*Trans. Amer. Math. Soc.* **62** (1947), 320–337] са условом да је $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ Mielnik-ов простор [*Comm. Math. Phys.* **9** (1968), 55–80] димензије два, са $p(x, y) = \frac{1}{4} \|x + y\|^2$ за свако $x, y \in X$. Наставак овог истраживања се појављује у његовом раду [Mielnik's probability spaces and characterization of inner product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **183** (1973), 441–448], при чему користи

Senecchalle-ову карактеризацију простора са унутрашњим производом [*Proc. Amer. Math. Soc.* **19** (1968), 1306–1312] да докаже да је нормирани линеарни простор X истовремено простор са унутрашњим производом ако и само ако постоји непрекидна растућа функција $f : [0,2] \rightarrow [0,1]$ таква да за све јединичне векторе $x, y \in X$ важи $f(\|x + y\|) + f(\|x - y\|) = 1$. У вези са овом проблематиком поменућу и следеће радове које је Часлав објавио са сарадницима: С.Ф. Blakemore, Љ.В. Stanojević, On functional equations related to Mielnik's probability spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **52** (1975), 315–316; А.Р. Blass, Љ.В. Stanojević, Partial Mielnik spaces and characterization of uniformly convex spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **55** (1976), no. 1, 75–82; С.Ј. Guccione, Љ.В. Stanojević, Probabilistic foundations of quantum theories and Rubin-Stone spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **82** (1976), no. 3, 481–483; С.Ј. Guccione, Љ.В. Stanojević, A class of functional equations and Mielnik probability spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **59** (1976), no. 2, 317–320.

У тек основаном новом часопису који покренуо академик Ђуро Курепа (1907-1993), Часлав је објавио два рада: А.Р. Blass, Љ.В. Stanojević, On certain classes of associative rings, *Math. Balkanica* **1** (1971), 19–21; З. Ivković, Љ.В. Stanojević, Distributions of coincidence of n random signals and sample range, *Math. Balkanica* **1** (1971), 126–128. Поменимо из овог периода и рад: З. Ivković, М. Kocher, Љ.В. Stanojević, On random n -fold coincidences, *J. Appl. Probability* **7** (1970), 785–787.

Као што сам већ напоменуо главна област истраживања Часлава Станојевића били су проблеми везани за интеграбилност и конвергенцију тригонометријских редова, посебно L^1 -конвергенцију, где је постигао своје најзначајније резултате, који оставили трајни траг у светској литератури у овој области. Поменућу овде само неке од тих резултата.

У заједничком раду [*J. Math. Anal. Appl.* **43** (1973), 579–586] Ч. S. Rees и Станојевић доказују више резултата у вези са модификованим тригонометријским редовима, тј. под извесним рестрикцијама за коефицијенте редова они дају потребне и довољне услове да такве тригонометријске суме придадају простору $L^1[0,\pi]$. Са својим првим докторантом John W. Garrett-ом, Часлав је објавио серију радова о интеграбилности и L^1 -конвергенцији више класа Fourier-ових редова (са коефицијентима ограничене варијације, са квази монотоним коефицијентима, итд.) у престижним часописима: *Bull. Amer. Math. Soc.* **82** (1976), no. 1, 129–130; **82** (1976), no. 2, 252; *Proc. Amer. Math. Soc.* **54** (1976), 101–105; **60** (1976), 68–71 (1977); **72** (1978), no. 3, 535–538; **80** (1980), no. 3, 423–430; *Indian J. Pure Appl. Math.* **7** (1976), no. 8, 873–879.

Посебно бих желео да истакнем рад Часлава Станојевића [Tauberian conditions for L^1 -convergence of Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.* **271** (1982), no. 1, 237–244], где он разматра парцијалну суму $S_n(f) = \sum_{|j| \leq n} \hat{f} \exp(ijt)$ Fourier-овог реда функције $f \in L^1(T)$ (простор комплексних функција интеграбилних на $T = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$). Под извесним условима регуларности за Fourier-ове редове са парним коефицијентима, из Чаславовог претходног рада [Classes of L^1 -convergence of Fourier and Fourier-Stieltjes series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **82** (1981), no. 2, 209–215] позната је еквиваленција између $\|S_n(f) - f\| = o(1), n \rightarrow \infty$ и $\hat{f}(n) \log n = o(1), n \rightarrow \infty$.

Уводећи слабији услов асимптотски парних (АЕ) коефицијената, који је такав да сваки паран коефицијент је АЕ, Часлав Станојевић доказује следеће интересно тврђење: Ако је $\hat{f}(n)$ АЕ и за неко $p \in (1, 2]$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{[\lambda n]} j^{p-1} |\Delta \hat{f}(j)|^p = 0,$$

тада је

$$\|S_n(f) - f\| = o(1), n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \|\hat{f}(n)E_n + \hat{f}(-n)E_{-n}\| = o(1), n \rightarrow \infty,$$

где је $E_n(t) = \sum_{k=0}^n \exp(ikt)$. Овај резултат обухвата више претходно познатих резултата, укључујући и један ранији резултат који су доказали Ранко Бојанић и Часлав Станојевић у раду [A class of L^1 -convergence, *Trans. Amer. Math. Soc.* **269** (1982), no. 2, 677–683].

Настављујући даљи рад у овој области, Часлав је самостално или са својим сарадницима доказао и објавио већи број значајних резултата. Један од његових успешних сарадника – доктораната – био је William O. Bray, са којим је Часлав објавио већи број радова [Tauberian L^1 -convergence classes of Fourier series. I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **275** (1983), no. 1, 59–69]; [Tauberian L^1 -convergence classes of Fourier series. II, *Math. Ann.* **269** (1984), no. 4, 469–486]; [On weighted integrability of trigonometric series and L^1 -convergence of Fourier series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **96** (1986), no. 1, 53–61]. Поменимо овде и један интересантан Чаславов рад са супругом Вером Б. Станојевић [Generalizations of the Sidon-Telyakovskii theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **101** (1987), no. 4, 679–684], као и радове [O-regularly varying convergence moduli of Fourier and Fourier-Stieltjes series, *Math. Ann.* **279** (1987), no. 1, 103–115] и [Structure of Fourier and Fourier-Stieltjes coefficients of series with slowly varying convergence moduli, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **19** (1988), no. 1, 283–286], у којима Часлав наставља студију започету у својим претходним радовима и чини даљи прогрес у овој области. Поменимо најзад и рад [D.E. Grow, Č.V. Stanojević, Convergence and the Fourier character of trigonometric transforms with slowly varying convergence moduli, *Math. Ann.* **302** (1995), no. 3, 433–472], за који је веома афирмативни приказ у MR1339921 (96k:42008) написао С. Carton-Lebrun. На крају овог приказа, посебно бих желео да истакнем и важност монографије: Ch.S. Rees, S.M. Shah, Č.V. Stanojević, **Theory and applications of Fourier analysis**. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 59. *Marcel Dekker, Inc., New York*, 1981. viii+419 pp. ISBN: 0-8247-6903-1 (MR 82a:42001).

Професор Часлав Станојевић је посебан квалитет испољио у организацији научних скупова из области анализе под називом **International Workshop in Analysis and its Applications (IWAA)**. Идеја за одржавање оваквих скупова је настала 1984. године [Organizing & Advisory Committee: R.P. Boas, R.R. Goldberg, J.P. Kahne]. За место одржавања изабрани су Купари, 20 км. удаљени од Дубровника у предивној природи у војном комплексу хотела. Период за одржавање скупова је одабран да буде почетком јуна, пред сам почетак туристичке сезоне. Скуп је, по правилу, трајао 10 дана (од 1. до 10. јуна). Створени су услови за окупљање научника, у то време и са ИСТОКА и са ЗАПАДА (тј. практично из целог света). Часлав је волео

да каже да је то била “*аристократска конференција*”. Предавања, дружење, купање; сви су на окупу 10 дана, слично традиционалним скуповима који се сваке недеље одржавају у Немачкој (Oberwolfach). Једном речју за учеснике незабораван доживљај у сваком погледу. Четири конференције су одржане у Купарима: I IWAA (1986); II IWAA (1987); III IWAA (1989) (Тема: *Karamata's Regular Variation*) и IV IWAA (1990) (Тема: *Inner Product and Convexity Structures in Analysis, Mathematical, Physics, and Economics*). Тада је дошла је 1991. година и распад СФРЈ, тако да је V конференција IWAA (1991) отказана. Одржана су још два скупа из ове серије у САД.



Слика 1. Сергей Михайлович Никольский



Слика 2. Walter Rudin

Професор Часлав Станојевић је био уредник 4 зборника радова са ових скупова, укључујући и један од њих који је штампан као специјални број часописа које издаје Математички институт САНУ [Proceedings of the Third Annual Meeting of the International Workshop in Analysis and its Applications. Dedicated to Karamata's regular variation. Edited by S. Aljančić and Č. V. Stanojević. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* **48** (62) (1990). *Institut Mathématique, Belgrade*, 1990. pp. 1–207].

Као што сам већ рекао, значај Купарских скупова је и посебно био у томе што су на њих долазили и активно учествовали математичари целог света. Поменућу само нека од имена из бившег СССР-а (Математически институт им. В. А. Стеклова, Руске академије наука): Сергей Михайлович Никольский, Олег Владимирович Бесов, Сергей Борисович Стечкин (1920-1995), Борис Сергеевич Кашин, Сергей Александрович Теляковский. Са америчке стране учествовали су: Walter Rudin (1921-2010), Ronald A. DeVore, Richard Askey, Bogdan Bajšanski, Petronije Milojević, итд. Saburou Saitoh из Јапана и многи други.



Слика 3. Олег Владимирович Бесов



Слика 4. Борис Сергеевич Кашин

За мене су била интересантана два догађаја. Први, када је Бесов поново одржао своје предавање дан касније, уз преводиоца, да би било разумљиво и за оне са англо-саксонског језичког подручја, а други догађај када је, после “напорне” (непроспаване) летње ноћи, на захтев Стечкина, Часлав пристао да изјутра рано, практично без икакве припреме и такорећи директно из кафане, одржи предавање, које је, сећам се, започео реченицом “Данас сам дошао на своју сахрану ... “. Предавање је, међутим, било бриљантно!



Слика 5. Српска екипа на IWAA (с лева на десно): Татјана Острогорски, Милан Тасковић, Стеван Пилиповић, Градимир Миловановић, Часлав Станојевић, Олга Хаџић и њена мајка Радмила Хаџић

Купарске конференције имале су огроман значај за продор и афирмацију српске (и југословенске) математике изван оквира тадашње СФРЈ, а посебно када је реч о младим математичарима. Часлав је имамо изузетан преглед развоја математике у појединим срединама и на универзитетима у Србији и управо је на Купарске конференције позивао млађе математичаре који су већ почели да објављују радове у међународним часописима, успостављао са њима разне облике научне сарадње и пријатељске релације, позивао их на гостовања у САД, итд.

Поменућу овде само неколико личних запажања. Почетком осамдесетих година прошлог века започео сам интензивну сарадњу са једним од водећих научника у области нумеричке анализе Валтер Гаучијем (Walter Gautschi, Purdue University), са којим смо објавили десетак заједничких радова. Часлава нисам познавао, али је он запазио неке моје радове, а посебно чланак [G.V. Milovanović, An extremal problem for polynomials with nonnegative coefficients, *Proc. Amer. Math. Soc.* **94** (1985), 423–426] у коме сам дао комплетно решење L^2 -екстремалног проблема типа Маркова $C_n(\alpha) = \sup\{\|P'\| / \|P\| : P \in W_n\}$ за класу ненегативних полинома W_n са Laguerge-овом мером $d\lambda(x) = x^\alpha \exp(-x)dx$, $\alpha > -1$, коме је амерички математичар индијског порекла А.К. Варма посветио читаву серију радова у *Proc. Amer. Math. Soc.*, обезбеђујући притом решење за $\alpha \in (0, 1/2)$ и $\alpha \in ((\sqrt{5}-1)/2, +\infty)$. Било је више покушаја да се нађе решење у «рупи» $\alpha \in (1/2, (\sqrt{5}-1)/2)$. Мој приступ је обезбедио решење проблема је за свако $\alpha > -1$, укључујући, дакле, и нетривијални домен $(1/2, (\sqrt{5}-1)/2)$. Управо, због тог резултата био сам позван да учествујем већ на првом скупу IWAA (1986) и да одржим предавање из области екстремалних проблема за полиноме. Озбиљно сам се за то предавање припремао, проучавао проблематику, а Часлав ме је охрабривао да се дубље посветим екстремалним проблемима и као резултат свега тога је моје потпуно укључивање у ту проблематику са којом се, између осталог, бавим током читаве моје каријере, укључујући и писање монографије [G.V. Milovanović, D.S. Mitrinović, Th.M. Rassias, *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific Publ. Co., Singapore – New Jersey – London – Hong Kong, 1994, XIV+822 pp.; ISBN: 981-02-0499-X].

Један вид охрабрења и помоћи који ми је Часлав такође пружио током тих година је било приликом покретања научног часописа на Универзитету у Нишу: FACTA UNIVERSITATIS, Series: Mathematics & Informatics. Прва редакција часописа укључила је математичаре управо са IWAA скупова (Часлав, Кашин, Тони Милојевић, Олга Хаџић, Стева Пилиповић, Saitoh, ...).

У свему овоме препознајем улогу Часлава Станојевића од кога смо могли доста да научимо и директно и индиректно. И не само МАТЕМАТИКУ! Зато у име математичара из Србије могу само да кажем: ХВАЛА ТИ ЧАСЛАВЕ!